

## CAPITOLO 8

Il Teorema di Lancret sulla sfera  $\mathbb{S}^3$ 

Il concetto di elica generalizzata fu trasferito, per la prima volta, in ambito riemanniano da Hayden [12]. In tale articolo, un'elica generalizzata viene definita come una curva per la quale un campo vettoriale lungo essa, parallelo secondo Levi-Civita, forma angoli costanti con tutti i vettori del riferimento di Frenet. Tuttavia, questa definizione sembra essere molto restrittiva. Più recentemente Barros [1] propone una definizione di elica generalizzata (o elica di Lancret) su una varietà riemanniana 3-dimensionale semplicemente connessa di curvatura sezionale costante  $c$  ( $c = 0, +1, -1$ ) sostituendo la fissata direzione (nella Definizione 2.39) con un campo vettoriale di Killing, inoltre dimostra un Teorema di Lancret per questo tipo di “eliche”. Per  $c = 0$  si ritrova il classico Teorema di Lancret per le curve di  $\mathbb{R}^3$  (cf. Teorema 2.42). Per  $c \neq 0$ , il caso più interessante è quello della sfera unitaria ( $c = +1$ ). In questo capitolo diamo una presentazione auto contenuta e dettagliata, con strumenti “elementari”, del Teorema di Lancret nel caso della sfera unitaria 3-dimensionale.

8.1. Apparato di Frenet per curve di  $\mathbb{S}^3$ 

Indichiamo con  $\mathbb{S}^3$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\mathbb{S}^3 = \{p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Molti concetti della teoria delle superfici di  $\mathbb{R}^3$  si possono estendere in modo del tutto analogo al caso di  $\mathbb{S}^3$  che è una ipersuperficie di  $\mathbb{R}^4$ .

Una **curva differenziabile**  $\gamma$  di  $\mathbb{S}^3$  è un'applicazione differenziabile

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4, t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)),$$

ossia è una curva differenziabile di  $\mathbb{R}^4$  che assume valori nella sfera  $\mathbb{S}^3$ . Un vettore  $V_p \in T_p \mathbb{R}^4$ ,  $p \in \mathbb{S}^3$ , si dice **vettore tangente** in  $p$  alla sfera  $\mathbb{S}^3$  se esiste  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3$  curva differenziabile di  $\mathbb{S}^3$  ed esiste  $t_0 \in I$  tali che

$$\gamma(t_0) = p \text{ e } \dot{\gamma}(t_0) = V_p.$$

Indichiamo con  $T_p \mathbb{S}^3$  l'insieme di tutti i vettori tangenti in  $p$  alla sfera  $\mathbb{S}^3$ , e con  $\xi_p$  il campo vettoriale definito da

$$\xi_p = (x_1(p), x_2(p), x_3(p), x_4(p))_p \equiv p \quad \text{per ogni } p \in \mathbb{S}^3.$$

$\xi$ , che nella teoria delle superfici è stato indicato con  $N$ , è un **campo vettoriale unitario normale** alla sfera  $\mathbb{S}^3$ .

**Proposizione 8.1.** *Risulta*

$$T_p \mathbb{S}^3 = \xi_p^\perp = p^\perp.$$

Quindi,  $T_p \mathbb{S}^3$  è un sottospazio vettoriale 3-dimensionale di  $T_p \mathbb{R}^4$ , che viene detto **spazio tangente** in  $p$  alla sfera  $\mathbb{S}^3$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $V_p \in T_p \mathbb{S}^3$ ,  $V_p = (p, v)$ , allora esiste una curva differenziabile  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  di  $\mathbb{S}^3$  tale che  $\gamma(t_0) = p$  e  $\dot{\gamma}(t_0) = V_p$ , quindi  $x'_i(t_0) = v^i$  per ogni  $i = 1, \dots, 4$ . Siccome  $\gamma(t) \in \mathbb{S}^3$ , abbiamo

$$\sum_{i=1}^4 x_i(t)^2 = 1 \text{ e derivando si ha } \sum_{i=1}^4 x'_i(t)x_i(t) = 0,$$

per cui

$$\sum_{i=1}^4 x'_i(t_0)x_i(t_0) = 0, \quad \text{ossia} \quad \sum_{i=1}^4 v^i x_i(p) = 0.$$

Quindi,

$$V_p \cdot \xi_p = 0 \quad \text{da cui segue che} \quad V_p \in \xi_p^\perp.$$

Viceversa, sia  $V_p \in \xi_p^\perp$ ,  $V_p = (p, v)$ ,  $v \neq 0$ , e quindi  $v \cdot p = 0$ . Posto  $\lambda = \|v\| > 0$  e  $v_1 = v/\lambda$ , consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (\cos \lambda t)p + (\sin \lambda t)v_1.$$

Si vede facilmente che  $\gamma$  è una curva di  $\mathbb{S}^3$  e soddisfa  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$ . Pertanto,  $V_p \in T_p \mathbb{S}^3$ .  $\square$

Data una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $\mathbb{S}^3$ ,  $t \in I$ , sia  $V(t)$  un campo vettoriale (tangente a  $\mathbb{S}^3$ ) differenziabile lungo  $\gamma$ , ossia

$$V(t) = (V^1(t), V^2(t), V^3(t), V^4(t))_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} \mathbb{S}^3$$

con  $V^i(t)$  funzioni differenziabili. La **derivata covariante** di  $V(t)$  è il campo vettoriale (tangente a  $\mathbb{S}^3$ ) differenziabile lungo  $\gamma$  definito da

$$\frac{DV}{dt} := (V'(t))^\top = V'(t) - (V'(t) \cdot \xi_{\gamma(t)})\xi_{\gamma(t)} = V'(t) - (V'(t) \cdot \gamma(t))\gamma(t),$$

e quindi  $DV/dt$  è definito dall'*equazione di Gauss*. Se indichiamo con  $\mathfrak{X}(\gamma)$  lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali (tangenti a  $\mathbb{S}^3$ ) differenziabili lungo  $\gamma$ , è facile verificare che l'operatore  $D/dt$  è un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\gamma)$ . Inoltre, per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$  e per ogni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile, valgono le proprietà

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(fV) &= f'(t)V + f \frac{DV}{dt}, \\ (V \cdot W)' &= \frac{DV}{dt} \cdot W + V \cdot \frac{DW}{dt}. \end{aligned}$$

Ora sia  $\gamma(s)$  una curva regolare di  $\mathbb{S}^3$  parametrizzata a velocità unitaria. Quindi, il **campo tangente** lungo  $\gamma$ , che indichiamo con  $T(s)$ , è unitario:

$$T(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \|T(s)\| = \|\dot{\gamma}(s)\| = 1.$$

**Definizione 8.2.** La funzione

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \kappa(s) := \left\| \frac{DT}{ds} \right\| \geq 0,$$

è detta **curvatura** della curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ .

Supponiamo che  $\gamma(s)$  sia un arco di curva regolare a velocità unitaria e con curvatura  $\kappa(s) > 0$  per ogni  $s \in I$ . Siccome  $T(s) \cdot T(s) = 1$ , allora abbiamo  $(DT/ds) \cdot T(s) = 0$  e quindi  $(DT/ds) \perp T(s)$ . Il campo vettoriale

$$N(s) := \frac{1}{\|DT/ds\|} \frac{DT}{ds} \in \mathfrak{X}(\gamma),$$

detto **campo normale principale** lungo  $\gamma$ , è un campo vettoriale unitario ortogonale a  $T(s)$ . Il **campo binormale** lungo  $\gamma$  è il campo vettoriale unitario  $B \in \mathfrak{X}(\gamma)$  ortogonale a  $T(s)$  ed  $N(s)$  e orientato in modo tale che

$$\det(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s)) = +1,$$

ossia orientato in modo tale che  $(\xi_{\gamma(s)}, T(s), N(s), B(s))$  sia una base ortonormale positiva di  $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^4$ . In particolare,

$$(T(s), N(s), B(s))$$

è una base ortonormale lungo  $\gamma$  di  $T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$  che viene detta **riferimento di Frenet** (o *triedro di Frenet*) della curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ . Una curva regolare  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$  parametrizzata a velocità unitaria e con curvatura  $\kappa(s) > 0$ , la diremo **curva di Frenet** di  $\mathbb{S}^3$ .

**Definizione 8.3.** La funzione **torsione** di una curva di Frenet  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ , è la funzione

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \tau(s) = -\frac{DB}{ds} \cdot N(s) = B(s) \cdot \frac{DN}{ds},$$

L'insieme

$$\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$$

si chiama **apparato di Frenet** della curva  $\gamma(s)$  di  $\mathbb{S}^3$ . Le corrispondenti *formule di Frenet* sono date da :

$$\begin{cases} \frac{DT}{ds} = & \kappa(s) N(s), \\ \frac{DN}{ds} = & -\kappa(s) T(s) & +\tau(s) B(s), \\ \frac{DB}{ds} = & -\tau(s) N(s). \end{cases}$$

Queste formule si dimostrano, usando le proprietà della derivata covariante, esattamente come per le curve di Frenet di  $\mathbb{R}^3$ .

**Osservazione 8.4.** Una curva differenziabile  $\gamma(t)$  della sfera  $\mathbb{S}^3$  si dice che è una **curva geodetica** se la sua accelerazione intrinseca  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ . In modo equivalente,  $\gamma(t)$  è una curva geodetica se il campo vettoriale  $\ddot{\gamma}(t)$  è parallelo al campo normale  $\xi_{\gamma(t)}$ . Quindi, come per la sfera  $\mathbb{S}^2$ , anche per la sfera  $\mathbb{S}^3$  si vede che le sue geodetiche sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo (opportunamente parametrizzate).

### 8.2. Eliche generalizzate e Teorema di Lancret sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Sia  $\gamma(s)$ ,  $s \in I$ , una curva di Frenet della sfera  $\mathbb{S}^3$ , e sia  $\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$  il corrispondente apparato di Frenet. Sia

$$H : I \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^3, \quad (s, r) \mapsto H(s, r) = \gamma_r(s),$$

una **variazione** della curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , cioè un'applicazione differenziabile con  $H(s, 0) = \gamma_0(s) = \gamma(s)$ . Il campo vettoriale

$$V(s) = \left( \frac{\partial H(s, r)}{\partial r} \right) (s, 0) = \left( \frac{d}{dr} \gamma_r(s) \right) \Big|_{r=0} = \dot{\gamma}_s(0) \in T_{H(s, 0)} \mathbb{S}^3 = T_{\gamma(s)} \mathbb{S}^3$$

è il *campo variazionale* di  $H$ . Indichiamo con  $v(s, r)$  la velocità scalare, con  $\kappa(s, r)$  la curvatura e con  $\tau(s, r)$  la torsione della curva  $\gamma_r(s)$ .

Seguendo [16] (e anche [1]), introduciamo la seguente

**Definizione 8.5.** Un **campo vettoriale**  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  si dice **di Killing** se, considerata una  $V$ -variazione di  $\gamma$ , ovvero una variazione avente  $V(s)$  come campo variazionale, risulta

$$\left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left( \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left( \frac{\partial \tau^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0.$$

Tale definizione è ben posta, cioè non dipende dalla particolare variazione considerata. Infatti, come provato in [16], cf. anche [1], risulta (omettendo il parametro  $s$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \left( \frac{DV}{ds} \cdot T \right) v = 0, \\ \left( \frac{\partial \kappa^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 2\kappa \left( \frac{D^2 V}{ds^2} \cdot N \right) - 4\kappa^2 \left( \frac{DV}{ds} \cdot T \right) + 2\kappa(V \cdot N) = 0, \\ \left( \frac{\partial \tau^2}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = \frac{2\tau}{\kappa} \left( \frac{D^3 V}{ds^3} \cdot B \right) - \frac{2\kappa'\tau}{\kappa^2} \left( \left( \frac{D^2 V}{ds^2} + V \right) \cdot B \right) \\ \quad + \frac{2\tau(1 + \kappa^2)}{\kappa} \left( \frac{DV}{ds} \cdot B \right) - 2\tau^2 \left( \frac{DV}{ds} \cdot T \right) = 0. \end{array} \right.$$

dove  $v, \kappa, \tau$  sono velocità scalare, curvatura e torsione della curva  $\gamma(s)$ . Pertanto, tenendo anche conto che  $\gamma(s)$  è di Frenet e quindi  $\kappa(s) > 0$ , un campo vettoriale  $V(s)$  è di Killing lungo  $\gamma$  se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$(8.1) \quad \frac{DV}{ds} \cdot T = 0,$$

$$(8.2) \quad \left( \frac{D^2 V}{ds^2} \cdot N \right) + (V \cdot N) = 0,$$

$$(8.3) \quad \tau \left( \frac{D^3 V}{ds^3} \cdot B \right) - \frac{\kappa'\tau}{\kappa} \left( \frac{D^2 V}{ds^2} + V \right) \cdot B + \tau(1 + \kappa^2) \left( \frac{DV}{ds} \cdot B \right) = 0.$$

**Osservazione 8.6.** Si noti che  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è di Killing se, e solo se,  $V$  è la restrizione a  $\gamma$  di un campo vettoriale di Killing definito su  $\mathbb{S}^3$ . Questo risultato è dovuto a J. Langer e D.A. Singer (J. London Math Soc., 30(1984), 512–520), cf. anche [1], Lemma 1. In particolare, il campo vettoriale

$$(8.4) \quad U = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

si vede facilmente che è tangente a  $\mathbb{S}^3$ , inoltre è di Killing (cf., ad esempio, [18] p.281-282). Quindi,  $U$  è di Killing lungo ogni curva  $\gamma$  di  $\mathbb{S}^3$ .

Quella che segue è la definizione di elica generalizzata proposta in [1].

**Definizione 8.7.** Una curva di Frenet  $\gamma(s)$  della sfera  $\mathbb{S}^3$  è detta **elica generalizzata** (o elica di Lancret) di  $\mathbb{S}^3$  se esiste un campo vettoriale differenziabile  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  che è di Killing, di lunghezza costante (che assumiamo uguale a 1) e forma un angolo costante  $\vartheta$  ( $\neq 0, \pi$ ) con  $T(s) = \dot{\gamma}(s)$ . Il campo vettoriale  $V(s)$  è detto **asse** dell'elica generalizzata  $\gamma$ .

Prima di enunciare il Teorema di Lancret per le suddette curve, proviamo alcuni risultati preliminari che permettono di semplificare la dimostrazione del Teorema principale.

**Proposizione 8.8.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica generalizzata della sfera  $\mathbb{S}^3$  e sia  $V$  un asse di  $\gamma$ . Allora

$$(8.5) \quad V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s),$$

dove  $\vartheta$  denota l'angolo tra  $V(s)$  e  $T(s)$ . Inoltre, curvatura e torsione sono legate da  $\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta = \text{cost.}$ , equivalentemente

$$(8.6) \quad \tau(s) = a\kappa(s) + b,$$

dove  $a = \cotg \vartheta$  e  $b$  sono costanti.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  il riferimento di Frenet lungo  $\gamma$ . Allora, omettendo di scrivere il parametro  $s$ , abbiamo

$$V = (V \cdot T)T + (V \cdot N)N + (V \cdot B)B.$$

Siccome  $V \cdot T = \text{cost.} = \cos \vartheta$ , derivando e usando la prima formula di Frenet, abbiamo

$$0 = (V \cdot T)' = \frac{DV}{ds} \cdot T + V \cdot \frac{DT}{ds} = \frac{DV}{ds} \cdot T + \kappa(V \cdot N).$$

D'altronde per la (8.1) si ha  $\frac{DV}{ds} \cdot T = 0$ , per cui  $V \cdot N = 0$  e quindi

$$V = \cos \vartheta T + (V \cdot B)B \text{ dove } V \cdot B = \sin \vartheta \text{ in quanto } \|V\| = 1.$$

Ora derivando la (8.5) e usando le formule di Frenet, otteniamo

$$(8.7) \quad \frac{DV}{ds} = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)N.$$

Derivando la (8.7), si ha

$$\frac{D^2V}{ds^2} = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) \frac{DN}{ds} + (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)' N$$

e quindi, usando la seconda formula di Frenet, otteniamo

$$(8.8) \quad \frac{D^2V}{ds^2} = -\kappa(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)T + \tau(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)B \\ + (\kappa' \cos \vartheta - \tau' \sin \vartheta)N.$$

Sostituendo la (8.8) nella (8.2), otteniamo

$$(\kappa' \cos \vartheta - \tau' \sin \vartheta) = 0.$$

Pertanto,

$$\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta = \text{cost.} = a_0,$$

e quindi  $\tau = a\kappa + b$  con  $a = \cotg \vartheta$  e  $b = -a_0/\sin \vartheta$ .  $\square$

**Proposizione 8.9.** *Se  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata della sfera  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau = 0$ , allora  $\kappa(s)$  è costante e  $\gamma$  è una curva di qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$  e in questo caso  $V(s) = B(s)$  è asse per  $\gamma$ .*

*Viceversa, se  $\gamma(s)$  è una curva di Frenet di  $\mathbb{S}^3$  contenuta in qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$ , allora  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau = 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla (8.6), se  $\tau = 0$  si ottiene subito che la curvatura  $\kappa$  è costante. Siccome  $\tau = 0$ , dalla terza formula di Frenet si ottiene  $DB/ds = 0$ , ovvero  $B(s)$  è parallelo lungo  $\gamma$ . Quindi, dalla definizione di  $DB/ds$  si ha

$$B'(s) = (B'(s) \cdot \xi_{\gamma(s)}) \xi_{\gamma(s)}.$$

D'altronde,  $B(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = 0$  implica

$$B'(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = -B(s) \cdot \xi'_{\gamma(s)} = -B(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = -B(s) \cdot T(s) = 0.$$

Quindi,  $B'(s) = 0$  ossia  $B(s)$  è parallelo lungo  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^4$  per cui  $B(s) = (b)_{\gamma(s)}$ ,  $b \in \mathbb{R}^4$ . Inoltre, siccome  $B(s)$  è tangente a  $\mathbb{S}^3$ , si ha

$$(8.9) \quad b \cdot \gamma(s) = B(s) \cdot \gamma(s) = B(s) \cdot \xi_{\gamma(s)} = 0.$$

Se indichiamo con  $E^3$  lo spazio euclideo 3-dimensionale per l'origine e ortogonale al vettore  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ , ovvero  $E^3 : \sum_{i=1}^4 b_i x_i = 0$ , allora la (8.9) ci dice che la curva  $\gamma(s)$  è contenuta nella sfera 2-dimensionale  $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$ . Inoltre, il campo vettoriale lungo  $\gamma$  definito da  $V(s) = B(s) = b_{\gamma(s)}$  soddisfa  $\|V\| = 1$  e  $\vartheta(V, T) = \pi/2$ . Infine, le derivate covariante di  $V$  nulle e la torsione  $\tau = 0$  implicano che (8.1), (8.2) e (8.3) sono soddisfatte. Quindi,  $V(s) = B(s)$  è asse per  $\gamma(s)$ .

Proviamo ora il viceversa. Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet di  $\mathbb{S}^3$  contenuta in qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$ . Allora,  $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$  dove  $E^3$  è un iperpiano di  $\mathbb{R}^4$  per l'origine. Sia  $b$  un vettore unitario di  $\mathbb{R}^4$  ortogonale a  $E^3$ . Siccome  $\gamma(s) \in E^3$ , abbiamo  $\gamma(s) \cdot b = 0$  e quindi  $T(s) \cdot b = \dot{\gamma}(s) \cdot b = 0$  e  $(DT/ds) \cdot b = 0$ . Di conseguenza i campi vettoriali  $T(s)$  e  $N(s)$  sono entrambi ortogonali a  $b$ .

D'altronde, da  $\gamma(s) \cdot b = 0$  segue che  $b_{\gamma(s)} \in T_{\gamma(s)}\mathbb{S}^3$ , per cui il campo binormale  $B(s)$  sarà parallelo a  $b_{\gamma(s)}$ . Pertanto possiamo assumere, cambiando verso a  $b$  se necessario, che  $B(s) = b_{\gamma(s)}$ . Allora,  $B'(s) = 0$  e quindi  $(DB/ds) = 0$  da cui segue che la torsione  $\tau(s) = 0$ . Pertanto, la curva  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau = 0$ . Inoltre, come prima si vede  $V(s) = B(s)$  è asse per  $\gamma(s)$ .  $\square$

**Proposizione 8.10.** *Sia  $\gamma(s)$  un'elica generalizzata della sfera  $\mathbb{S}^3$  con torsione  $\tau \neq 0$ . Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti.*

- 1) *La torsione  $\tau(s)$  è costante.*
- 2) *La curvatura  $\kappa(s)$  è costante.*
- 3) *Il rapporto  $\tau(s)/\kappa(s)$  è costante*
- 4) *Esiste  $V(s)$  asse per  $\gamma$  che è parallelo lungo  $\gamma$ , ovvero*

$$\frac{DV}{ds} = 0.$$

*Inoltre, se  $\gamma(s)$  è una curva di Frenet della sfera  $\mathbb{S}^3$  con torsione e curvatura costanti non nulle, allora  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata (che viene detta semplicemente **elica** di  $\mathbb{S}^3$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla (8.6) sappiamo che  $\tau = a\kappa + b$  con  $a, b$  costanti. Di conseguenza, si ottiene che le condizioni 1), 2) e 3) sono equivalenti. 3)  $\implies$  4). Assumiamo  $\tau/\kappa$  costante, equivalentemente  $\tau$  e  $\kappa$  costanti, e consideriamo lungo l'elica  $\gamma$  il campo vettoriale

$$(8.10) \quad V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s), \text{ dove } \vartheta \text{ è definito da } \cotg \vartheta = \tau/\kappa.$$

Per come definito  $V$  soddisfa le seguenti proprietà:  $\|V\| = 1$  e  $V \cdot T = \cos \vartheta$ . Inoltre,  $V$  è parallelo, infatti derivando e usando le formule di Frenet abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{DV}{ds} &= \cos \vartheta (\kappa N) + \sin \vartheta (-\tau N) = (\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) N \\ &= \sin \vartheta (\kappa \cotg \vartheta - \tau) N = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, siccome  $DV/ds = 0$ ,  $V$  è di Killing lungo  $\gamma$ , cioè soddisfa (8.1), (8.2) e (8.3) tenendo anche conto che  $\kappa$  è costante e quindi  $\kappa' = 0$ . Pertanto  $V(s)$  è asse per l'elica  $\gamma$ .

4)  $\implies$  3). Sia  $V(s)$ , con  $DV/ds = 0$ , asse per  $\gamma$ . Allora dalla (8.3) (una delle condizioni che definisce  $V$  di Killing) si ottiene che  $\tau \kappa' = 0$ . Siccome  $\tau \neq 0$ , otteniamo  $\kappa$  costante che è equivalente alla condizione  $\tau/\kappa$  costante. Infine, per provare l'ultima parte, basta osservare che se una curva di Frenet ha curvatura e torsione costanti non nulle, il campo vettoriale  $V$  definito dalla (8.10) è di Killing, e quindi la curva è un'elica generalizzata.  $\square$

Il seguente teorema, che è il Teorema di Lancret sulla sfera  $\mathbb{S}^3$ , classifica le eliche generalizzate di  $\mathbb{S}^3$ . La presente formulazione è un pò più dettagliata rispetto alla formulazione data in [1] (cf. Teorema 3).

**Teorema 8.11.** *Sia  $\gamma(s)$  una curva di Frenet di  $\mathbb{S}^3$ . Allora,  $\gamma(s)$  è un'elica generalizzata se e solo se vale una delle seguenti proprietà.*

- 1) *La torsione  $\tau = 0$  e  $\gamma$  è una curva di qualche sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  di  $\mathbb{S}^3$ .*
- 2) *La torsione  $\tau$  e la curvatura  $\kappa$  sono costanti non nulle, in tal caso*

$$\tau = a\kappa + b \quad \text{con } a, b \text{ costanti.}$$

- 3) *La torsione  $\tau$  e la curvatura  $\kappa$  non sono costanti, in tal caso*

$$\tau(s) = a\kappa(s) \pm 1, \quad \text{dove } a = \cotg \vartheta \text{ è costante.}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma(s)$  un'elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  e sia  $V(s)$  un asse di  $\gamma$ . Dalla Proposizione 8.8 e sua dimostrazione, sappiamo che vale la (8.8) e  $(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta) = a_0 = -b \sin \vartheta$  è costante. Allora, la stessa (8.8) diventa

$$\begin{aligned} \frac{D^2 V}{ds^2} &= -\kappa(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)T + \tau(\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta)B \\ &= b\kappa \sin \vartheta T - b\tau \sin \vartheta B, \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{D^2 V}{ds^2} + V = (b\kappa \sin \vartheta + \cos \vartheta)T + (-b\tau \sin \vartheta + \sin \vartheta)B.$$

Derivando  $D^2 V/ds^2$  e usando le formule di Frenet, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{D^3 V}{ds^3} &= b\kappa' \sin \vartheta T + b\kappa^2 \sin \vartheta N - b\tau' \sin \vartheta B + b\tau^2 \sin \vartheta N \\ &= b\kappa' \sin \vartheta T + b \sin \vartheta (\kappa^2 + \tau^2)N - b\tau' \sin \vartheta B. \end{aligned}$$

Sostituendo tutte le informazioni trovate in (8.3), si ottiene

$$-b\tau\tau' \sin \vartheta + \frac{\kappa'}{\kappa}\tau^2 b \sin \vartheta - \frac{\kappa'}{\kappa}\tau \sin \vartheta = 0$$

e quindi

$$(8.11) \quad \tau \sin \vartheta (b(\kappa'\tau - \kappa\tau') - \kappa') = 0.$$

Se  $\tau = 0$ , allora  $\gamma$  è un'elica del tipo di quella considerata nella Proposizione 8.9 e quindi otteniamo la 1). Se  $\tau \neq 0$ , la (8.11) diventa

$$(8.12) \quad b(\kappa'\tau - \kappa\tau') - \kappa' = 0.$$

Dalla (8.6) abbiamo  $\tau = a\kappa + b$  e quindi  $\tau' = a\kappa'$  dove  $a = \cotg \vartheta$  è costante. Sostituendo quest'ultima nella (8.12), si ottiene

$$\kappa'(b^2 - 1) = 0.$$

Se  $\kappa' = 0$ , allora  $\kappa$  e  $\tau = a\kappa + b$  sono costanti. In tal caso abbiamo la 2).

Se  $\kappa' \neq 0$ , allora  $b = \pm 1$  e quindi  $\tau = a\kappa \pm 1$ . In tal caso abbiamo la 3).

Viceversa, ogni curva di Frenet  $\gamma$  che soddisfi una delle proprietà elencate in 1), 2), 3) è un'elica generalizzata. Se  $\gamma$  soddisfa la proprietà 1), allora il risultato segue dalla Proposizione 8.9. Se  $\gamma$  soddisfa la proprietà 2), allora il risultato segue dall'ultima parte della Proposizione 8.10. Infine, se  $\gamma$  soddisfa la 3), quindi  $\tau = a\kappa \pm 1$ , basta considerare  $V(s) = \cos \vartheta T(s) + \sin \vartheta B(s)$ , dove



$\vartheta$  è definito da  $\cotg \vartheta = a$  e verificare che tale  $V$  è asse per la curva. Infatti,  $\|V\| = 1$  e  $V \cdot T = \cos \vartheta$  (costante). Inoltre, siccome  $\kappa \cos \vartheta - \tau \sin \vartheta = -b \sin \vartheta$  è costante, dove  $b = \pm 1$ , derivando  $V$  si ottiene

$$\frac{DV}{ds} = -b \sin \vartheta N, \quad \frac{D^2V}{ds^2} = b \kappa \sin \vartheta T - b \tau \sin \vartheta B$$

e

$$\frac{D^3V}{ds^3} = b \kappa' \sin \vartheta T + b \sin \vartheta (\kappa^2 + \tau^2) N - b \tau' \sin \vartheta B.$$

Quindi, si vede che (8.1), (8.2), (8.3) sono soddisfatte. In particolare, per la (8.3) si ottiene  $-\tau \sin \vartheta (\tau' \kappa b - \tau b \kappa' + \kappa') = 0$  in quanto  $\tau = a \kappa + b$ ,  $\tau' = a \kappa'$  e  $b^2 = 1$ .  $\square$

### 8.3. Modelli di eliche sulla sfera $\mathbb{S}^3$

Consideriamo la seguente curva di  $\mathbb{S}^3$ :

$$(8.13) \quad \gamma(t) = (\cos \alpha \cos at, \cos \alpha \sin at, \sin \alpha \cos bt, \sin \alpha \sin bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a, b \geq 0$  che soddisfano le condizioni

$$(8.14) \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad \text{e} \quad a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1.$$

Determiniamo la curvatura di  $\gamma$  come curva di  $\mathbb{S}^3$ . Siccome

$$\dot{\gamma}(t) = (-a \cos \alpha \sin at, a \cos \alpha \cos at, -b \sin \alpha \sin bt, b \sin \alpha \cos bt),$$

abbiamo  $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1$  e quindi il versore tangente

$$T(t) = \dot{\gamma}(t).$$

Inoltre,

$$\ddot{\gamma}(t) = (-a^2 \cos \alpha \cos at, -a^2 \cos \alpha \sin at, -b^2 \sin \alpha \cos bt, -b^2 \sin \alpha \sin bt),$$

e

$$\ddot{\gamma}(t) \cdot N_{\gamma(t)} = \ddot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) = \dots = -a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha = -1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \frac{DT}{dt} &= \ddot{\gamma}(t) - (\ddot{\gamma}(t) \cdot N_{\gamma(t)}) N_{\gamma(t)} \\ &= \ddot{\gamma}(t) - (\ddot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t)) \gamma(t) = \ddot{\gamma}(t) + \gamma(t) \\ &= \left( (1 - a^2) \cos \alpha \cos at, (1 - a^2) \cos \alpha \sin at, (1 - b^2) \sin \alpha \cos bt, \right. \\ &\quad \left. (1 - b^2) \sin \alpha \sin bt \right) \end{aligned}$$

e quindi la curvatura

$$\kappa^2(t) = \|DT/dt\|^2 = (1 - a^2)^2 \cos^2 \alpha + (1 - b^2)^2 \sin^2 \alpha.$$

Siccome la condizione  $a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1$  è equivalente a

$$(a^2 - 1) \cos^2 \alpha = (1 - b^2) \sin^2 \alpha,$$

otteniamo  $\kappa^2 = (a^2 - 1)(1 - b^2)$  e quindi

$$\kappa = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)} \text{ (costante).}$$

Adesso distinguiamo le differenti situazioni che si possono avere in corrispondenza dei valori che possono assumere i parametri  $a, b$ .

- Se  $\mathbf{a}=\mathbf{1}$ , la condizione (8.14) diventa  $\cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = 1$  che implica  $b = 1$ . In tal caso la curvatura è nulla e la curva  $\gamma$  è definita da

$$\gamma(t) = (\cos \alpha \cos t, \cos \alpha \sin t, \sin \alpha \cos t, \sin \alpha \sin t)$$

la quale è contenuta nel piano  $E^2$  (passante per origine) di  $\mathbb{R}^4$ , piano che ha equazioni:  $x_1 = (\operatorname{tg} \alpha)x_3$ ,  $x_2 = (\operatorname{tg} \alpha)x_4$ . Allora  $\gamma = E^2 \cap \mathbb{S}^3$  è una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^3$ , dunque una **curva geodetica** di  $\mathbb{S}^3$  (cf. Osservazione (8.4)). Stessa conclusione per  $a = b$ , infatti dalla (8.14) segue  $a = b = 1$ .

- Nel seguito assumiamo  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , e quindi  $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{1}$ , e determiniamo la torsione di  $\gamma$ . Il campo normale è definito da  $N = (1/\kappa)(DT/dt)$ , e quindi derivando  $DT/dt$  abbiamo

$$\begin{aligned} \kappa N'(t) &= (DT/dt)' \\ &= \left( -a(1-a^2)\cos \alpha \sin at, a(1-a^2)\cos \alpha \cos at, \right. \\ &\quad \left. -b(1-b^2)\sin \alpha \sin bt, b(1-b^2)\sin \alpha \cos bt \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa N'(t) \cdot \gamma(t) &= -a(1-a^2)\cos^2 \alpha \sin at \cos at + a(1-a^2)\cos^2 \alpha \cos at \sin at \\ &\quad - b(1-b^2)\sin^2 \alpha \sin bt \cos bt + b(1-b^2)\sin^2 \alpha \cos bt \sin bt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dunque,

$$\frac{DN}{dt} = N'(t) - (N'(t) \cdot \gamma(t))\gamma(t) = N'(t).$$

Dalla seconda formula di Frenet  $\frac{DN}{dt} = -\kappa T(t) + \tau(t)B(t)$ , abbiamo

$$\tau^2 = \left\| \frac{DN}{dt} + \kappa T(t) \right\|^2 = \|N'(t) + \kappa T(t)\|^2$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa(N'(t) \cdot T(t)) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 + 2\kappa\left(\frac{DN}{dt} \cdot T(t)\right) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa\left(N(t) \cdot \frac{DT}{dt}\right) + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - 2\kappa^2 + \kappa^2 \\ &= \|N'(t)\|^2 - \kappa^2. \end{aligned}$$

D'altronde, dall'espressione di  $\kappa N'(t)$  si ottiene

$$\begin{aligned}\kappa^2 \|N'(t)\|^2 &= a^2(1-a^2)^2 \cos^2 \alpha + b^2(1-b^2)^2 \sin^2 \alpha \\ &= \dots = (a^2 + b^2 - 1)\kappa^2.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\tau^2 = \|N'(t)\|^2 - \kappa^2 = (a^2 + b^2 - 1) - (a^2 - 1)(1 - b^2)$$

e quindi,

$$\tau^2 = a^2 b^2 \text{ (costante).}$$

Dunque, abbiamo quanto segue.

- Per  $a=0$  e  $b \neq 0$  (più precisamente  $b^2 = 1/\sin^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha > 1$ ),  
la torsione  $\tau = 0$  e la curvatura  $\kappa = \sqrt{b^2 - 1} > 0$ .

In tal caso la curva  $\gamma$  definita dalla (8.13) diventa

$$\gamma(t) = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha \cos bt, \sin \alpha \sin bt)$$

la quale è una curva piana, e il piano  $E^2$  che la contiene ha equazioni  $x_1 = \cos \alpha$ ,  $x_2 = 0$ . Quindi,  $\gamma$  è contenuta nella sfera  $\mathbb{S}^2 = E^3 \cap \mathbb{S}^3$ , dove  $E^3$  è l'iperpiano di equazione  $x_2 = 0$ . Tale curva è un esempio di elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$  del tipo 1) nel Teorema 8.11. Analogamente per  $a \neq 0$  e  $b = 0$ .

- Per  $a \neq 0, 1$  e  $b \neq 0, 1$  la curva  $\gamma(t)$  definita dalla (8.13) è un esempio di elica generalizzata con **curvatura e torsione costanti non nulle** date da

$$\kappa = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)} \quad \text{e} \quad \tau^2 = a^2 b^2.$$

Quindi, in questo caso otteniamo modelli di eliche sulla sfera  $\mathbb{S}^3$ , ossia esempi di eliche di  $\mathbb{S}^3$  del tipo 2) nel Teorema 8.11. Inoltre, in questo caso ritroviamo l'esempio enunciato in [11] p.240.

Infine, osserviamo che il campo vettoriale  $U$  definito dalla (8.4) è un campo vettoriale di Killing su  $\mathbb{S}^3$  (cf. Osservazione 8.6), per cui

$$U(t) = U_{\gamma(t)} = (-\cos \alpha \sin at, \cos \alpha \cos at, -\sin \alpha \sin bt, \sin \alpha \cos bt)$$

è di Killing lungo la nostra curva  $\gamma$ . Inoltre,  $\|U(t)\|^2 = 1$  e  $U(t)$  forma un angolo costante con  $\gamma(t)$ , più precisamente

$$\cos \vartheta = U(t) \cdot T(t) = a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha = \text{cost.}$$

Pertanto,  $U(t)$  è un asse per l'elica  $\gamma(t)$ .

**Osservazione 8.12.** La costruzione di eliche generalizzate del tipo 3) nel Teorema 8.11 è meno elementare, essa richiede nozioni più delicate. Tuttavia, diamo un'idea di massima del procedimento che si può seguire. Intanto, introduciamo brevemente quelli che vengono detti cilindri e tori di Hopf (cf. l'articolo di U. Pinkall [19] per dettagli). Consideriamo la sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  e la sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$  di raggio  $1/2$ . Sia  $\pi : \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  l'applicazione definita da

$$\pi : (z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{1}{2}(|z_1|^2 - |z_2|^2), z_1 \bar{z}_2\right)$$

nota col nome di **applicazione di Hopf**. Se  $\beta(t)$  è una curva della sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$ , l'immagine inversa  $M_\beta = \pi^{-1}(\beta)$  è una superficie piatta di  $\mathbb{S}^3$  che viene detta **cilindro di Hopf** su  $\beta$ . Se  $\beta(t)$  è una curva chiusa, allora la superficie  $M_\beta$  è isometrica a un toro piatto ed è detta *toro di Hopf*. Quando  $\beta(t)$  è una circonferenza con curvatura geodetica  $\kappa_g$ , il toro di Hopf  $M_\beta$  ha curvatura media costante  $H = \kappa_g/2$ . In particolare, se  $\beta(t)$  è una geodetica di  $\mathbb{S}^2(1/2)$ , il toro di Hopf  $M_\beta$  è un *toro minimale di Clifford*.

Seguendo [1] (cf. Teoremi 4,5, p.1508) e [3] (cf. Teoremi 1, p.12), ogni elica generalizzata di  $\mathbb{S}^3$ , e quindi anche quelle del tipo 3) nel Teorema 8.11, si può ottenere come geodetica di un cilindro di Hopf  $M_\beta$  su una opportuna curva  $\beta$  di  $\mathbb{S}^2(1/2)$ . E' interessante notare l'analogia di questo risultato col fatto che le curve di Lancret di  $\mathbb{R}^3$  si possono caratterizzare come le geodetiche di un cilindro retto su una curva piana (cf. Esempio 5.67).

**Esercizio 8.13.** Si consideri il modello di elica su  $\mathbb{S}^3$  dato dalla curva  $\gamma(t)$  definita dalla (8.13), con  $a \neq b, a > 0, b > 0$ . Posto  $z_1(t) = (\cos \alpha)e^{iat}$  e  $z_2(t) = (\sin \alpha)e^{ibt}$ , si può scrivere  $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$ , dove  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ .

Determinare una curva  $\beta_0$  della sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$  tale che il cilindro di Hopf  $M_{\beta_0}$  contenga l'elica  $\gamma$ . Dire se esiste un valore di  $\alpha$  per cui  $M_{\beta_0}$  è un toro di Clifford.

**Esercizio 8.14.** Per  $a \in ]0, 1[$ , si consideri la curva

$$\begin{aligned}\gamma_a(t) &= \frac{a}{a^2 + 1} \left( (1/a) e^{iat}, e^{i(t/a)} \right) \\ &= \frac{a}{a^2 + 1} \left( (1/a) \cos at, (1/a) \sin at, \cos(t/a), \sin(t/a) \right), t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Osservato che  $\gamma_a$  è una curva di  $\mathbb{S}^3$ , si determini curvatura e torsione. Inoltre, se  $\gamma_a$  è un'elica di  $\mathbb{S}^3$ , rispondere alle stesse domande dell'esercizio precedente dove il ruolo di  $\alpha$  è svolto dal parametro  $a$ .